

Dies Natalis 2008

Bol van Wiskunde

Rede ter gelegenheid van de 372ste Dies Natalis van de Universiteit Utrecht, gehouden op woensdag 26 maart 2008 in de Domkerk te Utrecht.

Rede uitgesproken door prof. dr. Ieke Moerdijk.



Ieke Moerdijk (1958) studeerde wiskunde, wijsbegeerte en algemene taalwetenschap aan de Universiteit van Amsterdam, en promoveerde in 1985 cum laude aan die instelling op een proefschrift over verbanden tussen mathematische logica en topologie. Na zijn promotie werkte hij als postdoc aan de Universiteiten van Cambridge (Peterhouse) en Chicago. In 1988 kwam hij naar Utrecht, alwaar hij sinds 1996 hoogleraar is in de topologie. Tussen 1995 en 2001 leidde hij hier het PIONIER-project "The Geometry of Logic". In 2006 werd hij benoemd tot lid van de KNAW.

Moerdijk is de auteur van vele wetenschappelijke artikelen, en een aantal invloedrijke boeken waaronder het in 1992 verschenen "Sheaves in Geometry and Logic", geschreven samen met Saunders Mac Lane van de Universiteit van Chicago. Hij heeft verschillende gasthoogleraarschappen bekleed, onder meer aan de Universiteiten van Cambridge (St John's College), Montreal (McGill University), Sydney (University), Nice, Louvain-la-Neuve en Aarhus.

Moerdijk vervulde een groot aantal adviesfuncties, zowel binnen de universiteit als daarbuiten. Zo was hij lid van de Universitaire Bachelor-Master Commissie van deze universiteit, en voorzitter van de NWO Adviescommissie voor de Wiskunde.

Bol van Wiskunde

Prof. dr. Ieke Moerdijk

Meneer de rector, dames en heren,

De wiskunde neemt een bijzondere plaats in tussen de wetenschappen. Enerzijds lijkt het vak zich autonoom te ontwikkelen, als product van de menselijke creativiteit. De geldigheid van wiskundige theorieën hoeft immers niet door experimenten te worden geschraagd. Wiskundige theorieën worden omringd door een aura van onaantastbaarheid: het woord *wiskunde* — de leer van wat *gewis*, *zeker*, is — zegt het al¹. Anderzijds hebben wiskundige theorieën een verbazingwekkend hechte relatie met de werkelijkheid van alledag. Elke keer weer blijkt dat wiskunde een onmisbaar instrument is om de verklaring van natuurverschijnselen te formuleren, en een krachtig hulpmiddel bij moderne technologische ontwikkelingen. Ik wil u graag meenemen op een tocht langs en door de wiskunde, om samen te trachten iets meer van haar ware aard te begrijpen. Om te proberen iets te begrijpen van de relatie tussen deze producten van het zuivere denken enerzijds en de werkelijkheid om ons heen anderzijds, iets van de relatie tussen wat wiskundigen *bewijzen*, en wat *waar* is of blijkt te zijn.

Wiskunde om ons heen

Voor degenen die er oog voor hebben is overal om ons heen elke dag wiskunde waar te nemen. Ik zal dat eerst aan de hand van een aantal voorbeelden illustreren.

Google en eigenvectoren

Vanochtend heeft u misschien, net als ik, geprobeerd wat meer te weten te komen over het werk van de collegae aan wie straks een eredoctoraat zal worden uitgereikt. De zoekmachine Google is hier-

bij een handig hulpmiddel. Het is verbazingwekkend hoe deze zoekmachine uit miljarden webpagina's ons binnen enkele seconden een selectie voorschotelt, en dat de eerste handvol pagina's die wij krijgen aangeboden meteen al iets van onze gading bevat of ons op het juiste spoor zet. De verklaring hiervoor ligt in een stukje klassieke, en niet eens zulke ingewikkelde wiskunde. Sommigen van u hebben misschien wel eens gehoord van de term "eigenvector", een vector in het platte vlak die onder een gegeven transformatie in zijn eigen richting wordt verplaatst. Wiskundigen hebben zich al heel lang beziggehouden met de vraag onder welke voorwaarden zulke eigenvectoren bestaan, en hoe je die — als ze bestaan — dan handig kan vinden. Er is hier veel over bekend², en de theorie van eigenvectoren geeft een prachtige verklaring voor het succes van de methoden waarmee Google een selectie voor ons maakt. Niet alleen het zoeken naar eigenvectoren speelt overigens een rol bij Google, ook waarschijnlijkheidsrekening, het omgaan met kansen, komt om de hoek kijken.

Vingerafdrukken en wavelets

Wetenschappelijk onderzoek is een internationale activiteit, waarbij een hoofdrol is weggelegd voor de Verenigde Staten. We gaan allemaal regelmatig naar de VS om lezingen te geven, congressen bij te wonen, of aan gezamenlijke artikelen te werken. De laatste jaren moet u iedere keer als u de douane passeert uw hoofd in de goede stand houden voor een irisscan, en beide wijsvingers op een plaatje leggen om een vingerafdruk te laten maken. We zijn inmiddels allemaal gewend aan deze procedure. Maar wat gebeurt er met al die plaatjes van vingerafdrukken, hoe wordt die informatie opgeslagen? Wiskundigen

beschrijven allerlei verschijnselen in termen van functies, en net als voor luchtstromingen, zeeniveaus, enz., geldt dat ook voor vingerafdrukken. De reeds 200 jaar oude theorie van de Franse wiskundige Fourier³ speelt hierbij een belangrijke rol: Fourier vond een prachtige manier om functies efficiënt te beschrijven als combinaties van heel speciale functies als cosinus en sinus, die u (in tegenstelling tot diegenen die het moderne wiskundeonderwijs genieten) nog kent uit de goniometrie van de middelbare school. De theorie van Fourier is de laatste jaren op sensationele manier verfijnd, en heeft geleid tot de theorie van "wavelets", — letterlijk: kleine golfjes⁴. Met behulp van deze wavelets is het mogelijk een relatief klein aantal kenmerkende eigenschappen van een vingerafdruk vast te leggen en op te slaan, waaruit een zeer gedetailleerd en getrouw plaatje van de vingerafdruk later altijd weer gereconstrueerd kan worden. Deze techniek van selectie van essentiële informatie enerzijds en reconstructie anderzijds wordt tegenwoordig toegepast op allerlei terreinen, bijvoorbeeld bij ruisonderdrukking in muziekopnames, en ook bij het opslaan van de foto's die u met uw digitale camera heeft gemaakt.

Internetbankieren en elliptische krommen

Geachte aanwezigen, de gasten onder u hadden het misschien niet kunnen weten, maar ik hoop dat de collega's van onze universiteit op weg hiernaartoe nog even langs de bankautomaat geweest zijn om wat contanten te pinnen. De nieuwbouw in de Uithof verloopt namelijk voorspoedig en drukt zwaar op ons budget, en ik ben er daarom niet zeker van of het tweede glas wijn bij de receptie straks niet toch contant afgerekend moet worden. En nu we het toch over banken hebben: wat is er

veel veranderd in het betalingsverkeer! Nu kan bijna alles elektronisch, en met een hoge graad van veiligheid. Betrouwbare passwords en elektronische handtekeningen, het is allemaal wiskunde. En net als eerder zien we hier een combinatie van de nieuwste methoden en zeer klassieke technieken. Die klassieke technieken zijn in dit geval vooral de getaltheorie en meer in het bijzonder de theorie van priemgetallen, alsook onderdelen van de algebraïsche meetkunde zoals de theorie van elliptische krommen. U weet allemaal wat een priemgetal is, en waarschijnlijk ook dat elk getal te schrijven is als product van priemgetallen: $10 = 2$ maal 5 , $63 = 3$ maal 3 maal 7 , enzovoort. De veiligheid van ons elektronisch betalingsverkeer is mede bepaald door het wiskundig gegeven dat het makkelijk is om grote priemgetallen met elkaar te vermenigvuldigen, maar heel moeilijk om van hele grote getallen te bepalen van welke priemgetallen ze precies het product zijn. Efficiënte methoden om dit te doen leunen niet alleen op krachtige en snelle computers, maar maken ook verrassend gebruik van begrippen uit de meetkunde als genoemde elliptische krommen, — algemene oplossingen van vergelijkingen van de vorm “ y kwadraat is x tot de derde plus a plus b ”.

Risicoanalyse en differentiaalvergelijkingen

U draagt allen onze universiteit en de daaraan gelieerde instellingen zoals het ziekenhuis en de Holding een warm hart toe, en velen van u zullen dan ook aandelen en opties bezitten in bedrijven met een Utrechtse grondslag, bijvoorbeeld in de biotechnologie. Misschien hebt u dan ook onlangs uw accountmanager bij uw bank nog gebeld, om haar te vragen hoe het ervoor stond met de puts and calls. Zo'n gesprek met een bankadviseur kan wel

eens lang duren, als de prijsstelling van derivaten en het inschatten en afdekken van allerlei risico's ter sprake komt. Dit gebied heeft grote ontwikkelingen doorgemaakt de laatste jaren. Het begon allemaal met de ontdekking van een belangrijke differentiaalvergelijking door Black en Scholes, en de toepassing daarvan door Merton op de prijsstelling van opties⁵. Nu zijn er aan vrijwel alle belangrijke universiteiten in de wereld masteropleidingen “financiële wiskunde”, waar studenten grondig worden getraind in de analyse en waarschijnlijkheidsrekening die komt kijken bij dit nieuwe deelgebied van de wiskunde. Eén van de meest succesvolle hedgefondsbeheerders op Wallstreet is trouwens een wiskundige, Jim Simons, onder al mijn vakgenoten bekend om de Chern-Simons formule⁶ uit de meetkunde, maar al een jaar of twintig fulltime investeerder⁷.

U ziet, geachte toehoorders, de wereld om ons heen staat *bol van wiskunde*. Mijn vak was altijd al de taal en het instrument van de natuurwetenschappen, maar speelt ook een steeds grotere rol in de levenswetenschappen, de economie, de sociale wetenschappen, en de geneeskunde. Ik zou u dan ook nog lang kunnen onderhouden met een welhaast eindeloze aanvulling op de zojuist genoemde voorbeelden.

Autonome wiskunde en topologie

Zijn wij wiskundigen, als een soort uitvinders in hun schuur achter in de tuin, dan de hele dag bezig met het zoeken naar nieuwe toepassingen? *Nee*. Mijn eigen vakgebied is de topologie. Dit is een soort moderne meetkunde, waarin men zich de ruimtelijke objecten voorstelt als zijnde van elastisch materiaal: je kunt er op willekeurige manier aan

duwen en trekken, zonder de essentiële eigenschappen van een object te veranderen. Het is een van de meest abstracte terreinen van de wiskunde, maar het vak blijkt telkens weer onverwachte verbanden met de werkelijkheid om ons heen te hebben. Zo helpt de knopentheorie, een klassiek onderdeel van de topologie, om een beter inzicht te krijgen in de werking van enzymen op DNA, en van de eigenschappen van polymeren⁸.

Verschillende Nederlanders hebben hun steentje bijgedragen aan de ontwikkeling van de topologie. Onze landgenoot L.E.J. Brouwer was aan het begin van de twintigste eeuw één van de grondleggers van het vakgebied. Hij toonde onder meer aan dat bij de vervorming van een *bol* er altijd minstens één punt moet zijn dat op zijn plaats blijft. Onder wiskundigen en ook economen is Brouwer met name bekend om deze zogenaamde dekpuntstelling, veel meer dan om zijn latere filosofische werk, waarover ik straks nog iets zal zeggen. Die dekpuntstelling, dat was een grote prestatie, omdat Brouwer deze op overtuigende wijze wist aan te tonen op een moment dat veel van de begrippen in de topologie nog onduidelijk waren⁹. In dit vakgebied gaan, net als in andere delen van de wiskunde, de ontwikkeling van *concepten* en de ontdekking van *bewijzen* hand in hand.

Die *wiskundige bollen* speelden een rol in Brouwers werk uit de beginjaren van de topologie en nemen nog steeds een belangrijke plaats in het vakgebied in. U heeft ruim een jaar geleden in de krant kunnen lezen hoe aan de Russische wiskundige Perelman de Fields Medal — het equivalent van de Nobelprijs in de wiskunde — toegekend werd¹⁰. Hij kreeg deze belangrijke prijs voor zijn oplossing

van het beroemde vermoeden dat de Franse wiskundige Henri Poincaré reeds in 1904 over het driedimensionale boloppervlak formuleerde¹¹. Dat driedimensionale boloppervlak is voor wiskundigen een vertrouwd object, maar voor u misschien niet zo makkelijk voor te stellen. Het gewone boloppervlak, zoals dat van een voetbal, is tweedimensionaal, en bestaat in de gewone driedimensionale ruimte die we om ons heen zien. U kunt zich allen voorstellen dat hoe u een lusje ook om het oppervlak van zo'n voetbal legt, u het er altijd weer af kunt schuiven. Deze eigenschap onderscheidt de bol van andere tweedimensionale oppervlakken zoals een ringoppervlak. Poincaré vermoedde dat deze eigenschap ook kenmerkend moest zijn voor genoemd driedimensionaal boloppervlak. Dit oppervlak bestaat in de vierdimensionale ruimte, en er zijn allerlei wiskundige kunstgrepen en trucjes voor nodig om hiervan in je hoofd, in je eigen *bol*, een goede voorstelling te maken.

Die dimensies kunnen natuurlijk nog veel hoger. Hans Freudenthal, een andere Nederlander die een belangrijke rol heeft gespeeld in de ontwikkeling van de topologie, bestudeerde wat er gebeurt als de dimensie helemaal naar oneindig gaat. Hij was de eerste die op heldere en bruikbare wijze van een aantal belangrijke topologische eigenschappen aantoonde dat ze in zekere zin geheel onafhankelijk zijn van de dimensie van het object, een prestatie waarmee hij wereldfaam verwierf¹². Hij was ook degene die het Utrechtse Mathematisch Instituut in de naoorlogse jaren met zijn latere collega's opbouwde tot wat het nu is: het grootste wiskunde-instituut (aan een algemene universiteit) in Nederland, met een gezond aantal eerstejaars studenten¹³ en met een

staf die zeer actief en succesvol is in onderwijs en onderzoek en serieus meedoet op het internationale speelveld van de wiskunde¹⁴.

Net als Brouwer, Perelman en Freudenthal, laten wiskundigen zich in hun onderzoek voornamelijk leiden door het zoeken naar concepten. Wiskunde is *niet* in de eerste plaats zo snel mogelijk kunnen rekenen, of zo goed mogelijk kunnen schatten, maar is vooral het zoeken naar de begrippen en definities die helderheid en orde scheppen in de chaos van priemgetallen, de veelheid van differentieerbare functies, en de wirwar van dimensies. De meest succesvolle begrippen zijn die waarover we mooie uitspraken kunnen bewijzen, uitspraken die deze chaos kunnen verhelderen. En dit het liefst nog op zo'n manier dat ze de verschillende deelgebieden van de wiskunde met elkaar in verband brengen. Het is en blijft een wonder dat deze zoektocht naar abstracte patronen zo nauw aansluit bij concrete toepassingen zoals het opslaan van vingerafdrukken en het internetbankieren, waarmee ik deze uiteenzetting begon. Eugene Wigner zei dit in de zestiger jaren al in zijn bekende artikel¹⁵ over "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences": hoe is het toch mogelijk dat abstracte begrippen als Hilbert-ruimten en operatorentheorie precies leveren wat de natuurkunde nodig heeft voor de ontwikkeling van de kwantummechanica, terwijl de oorsprong van deze abstracte begrippen in eerste instantie meer lijkt te liggen in wiskundige elegantie: mooie begrippen waar wiskundigen dol op worden omdat ze er fraaie dingen over kunnen bewijzen. Wigners betoog naar aanleiding van de kwantummechanica is alleen maar méér waar gebleken: we zien heden ten dage pre-

cies hetzelfde fenomeen opduiken als het gaat om de snaartheorie van natuurkundigen, die zo goed gebruik kan maken van lang daarvoor ontwikkelde, moeilijke begrippen als Riemannse oppervlakken en Calabi-Yau variëteiten. Het fascinerende is dat onze collega-natuurkundigen dan, vanuit een andere intuïtie, opeens met vragen, suggesties en vermoedens komen die het wiskundig onderzoek naar deze klassieke objecten een geheel nieuwe impuls geven: wij wiskundigen dachten dat we na jarenlange studie alles hadden gezegd wat er over deze helder en precies gedefinieerde objecten te zeggen valt, maar dat blijkt opeens niet zo te zijn! Deze kruisbestuiving tussen natuurkunde en wiskunde proberen we met name in Utrecht tot vrucht te brengen, in het kader van het cluster "Meetkunde en Kwantumtheorie"¹⁶, waarvoor in oktober 2006 door de toenmalige minister van OCW op vijftig meter hiervandaan het startschot is gegeven, en dat door NWO van ruime financiële steun wordt voorzien¹⁷.

Wiskunde en waarheid

Ik wil graag nog even terugkomen op wat ik zojuist, verwijzend naar Eugene Wigner, heb gezegd over de aard van wiskundig onderzoek, namelijk dat we niet als uitvindertjes op een *ad hoc* manier speuren naar toepassingen, maar eerder een zoektocht ondernemen naar concepten waarover we mooie uitspraken kunnen bewijzen. *Schoonheid* is een belangrijk begrip in de wiskunde, en *elegantie* een veelgebruikte term als wiskundigen elkaars werk bespreken. Maar schoonheid en elegantie is iets anders dan juistheid en toepasbaarheid. Wat maakt nu dat een wiskundige uitspraak ook *waar* is? Dat lijkt een heldere zaak: *wat bewezen is, is waar*.

Harry Mulisch zei het niet lang geleden in een interview in de NRC¹⁸ nog als volgt:

“Alleen in de logica, in de wiskunde en de natuurwetenschappen is de waarheid anoniem, dat wil zeggen objectief geldig; gaat het over mensen en hun meningen, dan kan zo iets als waarheid alleen geboren worden wanneer men het gezicht van de spreker erbij geleverd krijgt.”

Nu is Mulisch een groot schrijver, maar ook iemand die wel vaker betrap is op het doen van curieuze uitspraken over exacte wetenschappen. Maar hier heeft hij misschien gelijk, en hij krijgt van verschillende kanten bijval. Zo beweerde de wiskundige en SER-voorzitter Rinnooy Kan, vorig jaar nog bestempeld als onze meest invloedrijke landgenoot, in een paginagroot interview in dezelfde krant¹⁹ dat, “in tegenstelling tot in de politiek”, in “de wiskunde de waarheid ondubbelzinnig” is. Stevenen wij wiskundigen echt op een ondubbelzinnige waarheid af? Of verkennen we met onze concepten verschillende wiskundige werkelijkheden? Wordt de werkelijke aard van de wiskundige activiteit misschien beter beschreven door de Portugese auteur en Nobelprijswinnaar José Samarago, die onlangs²⁰ naar aanleiding van een vraag naar de aard van zijn fascinerende roman “De Stad Der Blinden” opmerkte:

“Ongerijmdheden? ... zelfs onwaarschijnlijkheden, ongelooflijke, ja onmogelijke gebeurtenissen. Het is of ik een contract met de lezer sluit: als hij voor de duur van het boek deze absurditeit aanvaardt, dan beloof ik hem een verhaal dat in alle opzichten tegelijkertijd logisch en speels is, maar ik doe het ook voor mijzelf. Als we dit of dat veronderstellen,

kunnen we dan nagaan wat daar de gevolgen van zijn, waar we zouden uitkomen? Er zit iets van wiskunde in...”

Samarago raakt hier een belangrijk aspect van de wiskunde, namelijk de verkenning van bepaalde hypothesen tot in hun uiterste logische consequenties. Maar dat kan niet de essentie van wiskunde zijn. Daarvoor is er veel te veel overeenstemming over wat wij beschouwen als de waarheid, als *bewijzen* van uitspraken; en belangrijker, als bewijzen van *relevante* uitspraken.

Maar wat is het *dán* dat ons wiskundigen bindt? Wat is die absolute wiskundige waarheid? We kunnen in elk geval constateren dat er een enorme en verbazingwekkende consensus is onder wiskundigen over wat een correct bewijs is. U kent misschien het verhaal over de stelling van Fermat, de Franse wiskundige uit de 17^e eeuw, die in de kantlijn van een geschrift beweerde een prachtig bewijs gevonden te hebben voor de bewering dat er geen positieve gehele getallen x , y , en z te vinden zijn waarvoor $x^n + y^n = z^n$ als de macht n minstens 3 is. (Ik herinner u eraan dat we in het geval $n=2$ natuurlijk de geheeltallige oplossingen hebben van de vergelijking van Pythagoras over de lengtes van de zijden van een rechthoekige driehoek.) Eeuwenlang is er gezocht naar het bewijs dat Fermat mogelijkwerwijs in gedachten had maar nergens heeft opgeschreven, echter zonder succes. Tot bijna 15 jaar geleden de Engelse wiskundige Andrew Wiles met de opzienbarende mededeling kwam de stelling bewezen te hebben. Zijn bewijs was buitengewoon complex, en bevatte de meest ingewikkelde en modernste concepten uit algebra en meetkunde. Tot grote ontstel-

tenis van Wiles zelf bleek er echter een fout in te zitten. In een jaar tijd vond Wiles toen, samen met zijn vroegere student Richard Taylor, met bovenmenselijke inspanning een ander argument voor een deel van het bewijs waarmee hij de fout wist te omzeilen²¹. Ik haal dit voorbeeld aan, omdat de experts Wiles eerst relatief snel konden overtuigen dat er een fout in het bewijs zat, en vervolgens, ná de reparatie, op grond van gedegen studie met zekerheid wisten te melden dat er nu inderdaad sprake was van een correct bewijs.

Zo is het niet altijd geweest. In de tweede helft van 19^e eeuw was er de beroemde en invloedrijke Italiaanse school in de algebraïsche meetkunde, waarvan men later vond dat hun bewijzen te zeer op intuïtie berustten, en in onvoldoende mate gepreciseerd konden worden. Mede hierom ontstond aan het begin van de 20^e eeuw de behoefte aan een preciezer fundering van de wiskunde, een diepgaande analyse van wat nu eigenlijk een bewijs is, en wat waar is. Zo begon de bekende Engelse filosoof en pacifist Bertrand Russell zijn indrukwekkende wetenschappelijke carrière met het magnum opus “Principia Mathematica”, geschreven samen met Whitehead²². In dit imposante werk probeerden Russell en Whitehead de hele wiskunde af te leiden uit een stel basisaxioma’s — zij probeerden de hele wiskunde te reduceren tot logica. Maar Principia Mathematica bleek geen Practica Mathematica, het systeem van Russell en Whitehead was veel te ingewikkeld en sloot slecht aan bij de wiskundige praktijk. Maar de noodzaak bleef om nu eens precies te analyseren wat een correct wiskundig bewijs is, en mede onder aanvoering van de Duitse wiskundige Hilbert kwam men met varianten op het

systeem van Russell en Whitehead. De meest bruikbare van deze varianten proberen de wiskunde te reduceren tot axioma’s voor verzamelingen, samen met regels die voorschrijven hoe je uit die axioma’s stellingen kunt bewijzen. Deze analyse van axioma’s en bewijzen heeft veel goeds gebracht: het heeft wiskundigen een strengere norm voor precisie gegeven dan die waarmee genoemde Italiaanse meetkundeschool genoegzaam; en het heeft het begrip algoritme verhelderd en heeft daarmee aan de basis van de ontwikkeling van de informatica gestaan.

Er zijn echter twee grote problemen bij het op deze manier precies maken van wat een wiskundig bewijs nu eigenlijk is. Het eerste probleem is dat, volgens de beroemde onvolledigheidsstelling van Gödel²³, zo’n systeem altijd uitspraken onbeslist laat. Met andere woorden, je kunt nog zoveel axioma’s voor verzamelingen opschrijven, er blijven altijd wiskundige beweringen die je niet kunt bewijzen, maar waarvan je het tegendeel ook niet kunt bewijzen. Of, als we een absoluut waarheidbegrip zouden veronderstellen, dan zegt Gödel dat er altijd uitspraken blijven die *wel* waar zijn, maar *niet* bewezen kunnen worden. Het tweede probleem is, dat geen enkele wiskundige zijn bewijzen formuleert volgens dergelijke door Russell en Whitehead of door de theorie van verzamelingen voorgeschreven regels. De consensus over het feit dat het eerste bewijs van Wiles van de stelling van Fermat onvolledig was en het tweede bewijs correct, had helemaal niets te maken met regeltjes en axioma’s voor verzamelingen.

Het volgen van logische regels leidt tot correcte bewijzen, maar grijpt naast de essentie van de wiskunde. Een mooie illustratie hiervan is het zoge-

naamde “vierkleurenprobleem”. Stelt u zich een wereldbol voor (*daar heb je hem weer, met z’n ballen, zult u denken*) waarin u de landen wilt kleuren, op zo’n manier dat aangrenzende landen verschillende kleuren hebben. Laten we voor het gemak aannemen dat er geen zeeën zijn, en geen enclaves als Baarle-Naassau. Hoeveel verschillende kleuren heeft u nodig? Er was een lang bestaand vermoeden dat vier kleuren voldoende²⁴. Na een eeuw van vele pogingen en vermeende bewijzen die incorrect bleken, werd uiteindelijk in 1976 een bewijs gevonden door Appel en Haken, maar dat maakte gebruik van zo veel ingewikkelde berekeningen en zo veel speciale gevallen die alleen met een krachtige computer geverifieerd konden worden, dat wiskundigen nog steeds op zoek zijn naar een “echt” bewijs, een bewijs dat ze kunnen begrijpen, en dat hun inzicht verschaft.

De eerder genoemde Brouwer was zich ook al bewust van het feit dat wiskunde niet tot logische regels gereduceerd kan worden en vatte wiskundige concepten en bewijzen op als individuele mentale constructies. Met ander woorden, een wiskundig bewijs bestaat volgens Brouwer alleen bij de gratie van het feit dat de wiskundige dit bewijs in zijn hoofd uitvoert. Brouwers extreme standpunt leidt echter tot een logica en wiskunde die in het geheel niet aansluit bij de dagelijkse wiskundige praktijk, en kan bovendien de grote consensus, het intersubjectieve karakter van de wiskunde, niet verklaren.

Filosofie van de wiskunde

We hebben gezien dat wiskunde in de eerste plaats een zoektocht is naar *concepten* waarover we mooie en relevante uitspraken kunnen *bewijzen*. En

dat er grote consensus is over wat een correct bewijs is. We hebben ook gezien hoe verrassend het is dat deze schijnbaar autonome zoektocht, deze zuiver theoretische exercitie, iedere keer weer leidt tot zulke verrassende toepassingen en correcte voorspellingen in de natuurkunde en in talrijke andere gebieden. In schril contrast hiermee heeft Gödel ons echter definitief de hoop ontnomen dat we ooit hard kunnen maken dat wat wiskundigen bewijzen *precies* dat is wat in de een of andere absolute zin “waar” is. Er gaapt een onoverbrugbare kloof tussen bewijsbaarheid en waarheid. Maar waar gaan die wiskundige concepten en stellingen dan over?

De filosofie van de wiskunde staat hier voor een onopgelost probleem en is tot nog toe niet in staat gebleken hier veel verstandigs over te zeggen. Het ging direct na Russell al helemaal mis, toen zijn leerling en protégé Wittgenstein probeerde de aard van de wiskunde te duiden²⁵. Ik denk dat er een belangrijk aspect van de wiskunde is, waaraan de traditionele zogenaamde filosofie van de wiskunde totaal voorbij gaat. Ik denk dat onze wiskunde uiteindelijk iets zegt over hoe ons brein werkt, over hoe wij denken. Wiskundige bewijzen moeten iets verhelderen, en des te duidelijker en efficiënter ze dat doen, des te mooier en eleganter wij ze vinden. Dat zegt iets over wat wij mensen met onze beperkte verstandelijke vermogens kunnen bevatten, en *niet* iets over wat waar is. Het verklaart ook waarom wij wiskundigen soms zo gelukkig zijn als we een meetkundige motivatie, of zelfs een meetkundig model, hebben gevonden voor een of andere lange en ingewikkelde algebraïsche berekening. Het is heel goed denkbaar dat de marsmannetjes of andere soorten buitenaardse wezens er een heel ander soort

wiskunde op na houden. Die willen misschien helemaal niet liever meetkunde dan algebra. Wat voor ons een onbegrijpelijke rekenpartij is, is voor hen misschien een glasheldere uitleg van, bijvoorbeeld het vierkleurenprobleem. Wiskunde zegt iets over wat er in ons hoofd gebeurt. Er ligt hier een uitdaging voor wetenschappers die zoeken naar de grondslagen en filosofie van de wiskunde, om samen met neurowetenschappers het verband te onderzoeken tussen de aard van de wiskunde en de werking van onze hersenen, over wat er in *onze bol* zit.

Tot slot

Dames en heren, we naderen het einde van mijn rondleiding door het wiskundig landschap. Ik hoop u overtuigd te hebben van de enorme en immer toenemende impact van de wiskunde op onze moderne maatschappij. Wiskunde wordt overal in technologie en levenswetenschappen toegepast, en omgekeerd inspireren problemen uit deze sectoren wiskundigen tot het ontwikkelen van nieuwe theorieën. Anderzijds ontwikkelt een groot deel van de wiskunde zich autonoom, als een schijnbaar zuiver intellectuele activiteit, met een moeilijk te doorgronden relatie tot de “waarheid”. Dit aspect van de wiskunde is een onlosmakelijk onderdeel van het menselijk denken, van onze manier van orde scheppen in de chaos om ons heen. Het dient alleen al daarom een centrale rol te spelen in al het onderwijs, van basisschool tot universiteit.

De voorbeelden aan het begin laten zien dat deze twee soorten wiskunde op onverwachte momenten bij elkaar kunnen komen: “de zuivere wiskunde van vandaag is de toegepaste wiskunde van morgen”²⁶. Deze wisselwerking is inherent aan de aard van de

wiskunde, en kan eenvoudigweg niet vermeden worden. Ons kunstmatig slechts op de toepassingen richten, of juist op de theorie, druist in tegen het ware karakter van de wiskunde, en laat het vak op de betreffende plek doodbloeden. Maar met het juiste evenwicht tussen toepassingen en theorie komt de wiskunde tot grote bloei.

Ik dank u voor uw aandacht.

Noten

- ¹ Simon Stevin (1548-1620) introduceerde het Nederlandse woord *wisconst*, de kunst van het gewisse, als equivalent van *mathematica*. Hij leverde zelf ook belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van het vak, verzameld in "Wisconstighe Gedachtenissen" (1605,1608). (Zie D.J. Struik, Het Land van Stevin en Huygens, Nijmegen, 1958.)
- ² Zie A.N. Langville en C.D. Meyer, Google's page rank and beyond: the science of search engine rankings, Princeton University Press, 2006. Relevante resultaten aangaande het bestaan van eigenwaarden gaan terug tot de zg. Perron-Frobenius theorie van rond 1910. Oskar Perron (1880-1975) werkte in een breed gebied reikend van algebra tot analyse en meetkunde; Georg Frobenius (1949-1917) is beroemd om zijn werk in groepentheorie. Een belangrijke bijdrage aan het probleem van het daadwerkelijk vinden van eigenwaarden is geleverd door mijn Utrechtse collega's G. Sleijpen en H. van der Vorst (zie A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems, *SIAM Journal of Matrix Analysis A* 17 (1996), 401-425). Voor de specifieke toepassingen op Google, zie het artikel "A hybrid two-dimensional method for sparse matrix partitioning" van collega Bisseling e.a. (te verschijnen, 2008).
- ³ Jean Baptiste Fourier, 1768-1830.
- ⁴ Wie meer wil weten over wavelets raadplege S. Jaffard, Y. Meyer, R.D. Ryan, *Wavelets, for science & technology*; revised ed. Philadelphia, 2001 (Society for Industrial and Applied Mathematics); of I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, Philadelphia, 1992 (Society for Industrial and Applied Mathematics).
- ⁵ Zie R.C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1973), 141-183. Aan Merton en Scholes werd in 1997 de Nobelprijs in de economie uitgereikt.
- ⁶ S.S. Chern, J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, *Annals of Mathematics* 99 (1974), 48-69.
- ⁷ Simons is beheerder van het fonds Renaissance Technologies Corp., dat wordt gerund volgens zuiver wiskundige analyse. RTC neemt uitsluitend wetenschappers (wiskundigen, fysici e.d.) in dienst, en was het meest succesvolle hedgefund op Wallstreet in 2006. Een aardig interview van Richard Teitelbaum met Simons uit november 2007 is te vinden op Bloomberg.com.
- ⁸ J.A. Calvo et. al. (eds), *Physical and Numerical Models in Knot theory – Including Applications to the Life Sciences*, World Scientific, 2005.
- ⁹ Brouwer publiceerde zijn dekpuntstelling in het artikel "Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten", *Mathematische Annalen* 71 (1911), 97-115. Voor een indruk van Brouwers invloed, zie J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser, Boston en Basel, 1989; en D. van Dalen, L.E.J. Brouwer – een biografie, Bert Bakker, Amsterdam, 2001.
- ¹⁰ Perelman weigerde overigens de prijs, iets wat niet eerder in de geschiedenis van de Fields Medal is voorgekomen. (Hij zei het idee te verwerpen dat in een vak als wiskunde, waar zo velen hun stenen en steentjes bijdragen aan de ontwikkeling, de ontdekker boven de ontdekking werd gesteld.)
- ¹¹ Zie H. Poincaré, *Oeuvres*, deel VI (Parijs, 1953). Zie ook het in de vorige voetnoot genoemde boek van Dieudonné. Een goed startpunt voor meer informatie over het werk van Perelman is www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html
- ¹² H. Freudenthal, Ueber die Klassen von Sphärenabbildungen, *Compositio Math.* 5 (1937), 299-314. Zie

- ook het hierboven genoemd boek van Dieudonné, p. 364 ff.
- ¹³ In het lopend academisch jaar zijn er ca. 100 eerstejaars studenten wiskunde (inclusief de studenten die een dubbele bachelor wiskunde en natuurkunde doen).
- ¹⁴ Freudenthal stond later ook aan de basis van het naar hem vernoemde Freudenthal Instituut, dat verantwoordelijk is voor de invoering van het realistisch rekenen in het basis- en voortgezet onderwijs en om deze reden tegenwoordig zwaar onder vuur ligt.
- ¹⁵ Communications in Pure and Applied Mathematics 13 (1960), 1-14.
- ¹⁶ Voor informatie over dit cluster Geometry and Quantum Theory, zie <http://www.gqt.nl>
- ¹⁷ Naast genoemde Geometry and Quantum Theory steunt N.W.O. ook de clusters Diamant (Discrete, Interactive and Algorithmic Mathematics, Algebra and Number Theory, zie <http://websites.math.leidenuniv.nl/diamant>) en NDNS (Nonlinear Dynamics of Linear Systems, zie www.ndns.nl).
- ¹⁸ NRC Handelsblad, vrijdag 27 juli 2007.
- ¹⁹ NRC Handelsblad, zaterdag 29 december 2007.
- ²⁰ Interview met Michael Zeeman, Volkskrant, vrijdag 20 oktober 2006.
- ²¹ A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Annals of Mathematics* 141 (1995), 443-551. Er is een prachtige BBC documentaire gemaakt over Andrew Wiles en zijn werk, die te bekijken is op YouTube.
- ²² A.N. Whitehead, B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press (drie delen, resp. 1910, 1912, 1913).
- ²³ Gödel publiceerde zijn beroemde onvolledigheidsstelling in het artikel "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38: 173-198, herdrukt in de *Collected Works* (eds. S. Feferman et.al.), in 5 delen uitgegeven door Oxford University Press (1986, 1990, 1995, 2003, 2003).
- ²⁴ Eén van de vroege referenties naar dit probleem is het artikel *On the colouring of maps* (*Proceedings of the Royal Geographical Society*, etc. Vol. 1, No. 4 (1879), 259-261) van de Engelse wiskundige Arthur Cayley (1821-1895).
- ²⁵ L. Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, edited by G.H. von Wright, R. Rhees, and G.E.M. Anscombe, Oxford 1956, third revised edition 1978.
- ²⁶ A. Doelman et. al., titel "Concentratie en Dynamiek - een strategie voor de wiskunde", NWO/OOW, 2008.

Eredocoraten



Daron Acemoglu (1967, US and Turkish citizen) got his PhD and MSc in Economics from the London School of Economics (LSE) and after a short stay as a lecturer at LSE moved to the Massachusetts Institute of Technology (MIT) in 1993. At MIT, he became a professor of Economics in 2000 and since 2004 he is Charles P Kindleberger Professor of Economics at MIT. His main fields of interests are political economy, economic development, economic growth, economic theory, technology, income and wage inequality, human capital and training, labour economics, and network economics. To date, he has published more than 60 (joint) papers in leading academic journals. His main books are *The Economic Origins of Dictatorship and Democracy* (together with James Robinson, Cambridge UP 2005) and *An Introduction to Modern Economic Growth* (forthcoming, Princeton UP, 2008). Professor Acemoglu has won various awards among which the *John Bates Clark Medal* in 2005 for the best American economist under the age of 40. He is research associate with amongst others the NBER and CEPR and he is currently

co-editor of *Econometrica* and *The Review of Economics and Statistics* and member of the editorial board of *The Journal of Economic Growth* and *the Journal of Economic Literature*.

Prof. dr. Daron Acemoglu

Erepromotores: Prof. dr. Harry Garretsen
Prof. dr. Clemens J.M. Kool

In his book *An Inquiry into the Wealth of Nations*, Adam Smith (1776), the founding father of modern economics, argued that the increased division of labour is the key to economic prosperity and well-being. Ever since Smith, the idea that specialization is (mostly) beneficial has become part of the standards of economics. When it comes to their own academic research, and this is probably true for research in general, economists have increasingly put Smith's insight into practice as well. With a few notable exceptions, research in economics has become a very specialized matter. Many researchers know, as the saying goes, very much about very little. According to some critics, the specialization trend has gone too far and economics as a scientific discipline will suffer because of this fragmentation, causing it to become more isolated from adjacent fields in the social sciences like law, geography, political science or history. In my view, this criticism of research in economics, the charge of over-specialisation, is exaggerated: nevertheless it calls for a serious response.

Now one way of falsifying a hypothesis is that of giving a counter-example. And the work by Professor Daron Acemoglu, the Charles P Kindleberger Professor of Economics at MIT, presents the perfect

counter-example to those people who claim that all is not that well in economics. Ever since his first major publication, back in 1993, Acemoglu has time and again shown that even in the alleged era of over-specialization, it is still possible to do path-breaking academic work in a wide range of sub-fields.

Acemoglu's research output is not only impressive in terms of its range and sheer quantity but, most importantly of course, also in terms of quality. There are not many economists who have studied such seemingly different fields and topics as economic development, human capital and labour economics, network economics, and the political economy of institutions. There are certainly only a handful of economists who have managed to (co-)author more than 60 papers in top academic journals within the short span of 15 years. Moreover, Acemoglu has also 25 book chapters, 2 major books, and 3 book manuscripts in preparation.¹ On his own, he is just as productive as an entire first-class department in economics taken together! In addition, he belongs to that rather exclusive group of economists who are considered leading and inspiring scholars in other disciplines: Acemoglu is, so to speak, a household name in, for instance, economic history, law and political science. To get a quick idea of the impact of his research, go to Google Scholar[©] and be impressed by the vast number and range of researchers that have cited his work. And all this for an economist who turned only 40 last September!

As to the quality of Daron's research, the shortest summary is that, as a mix of theoretical as well as

empirical work, it invariably delivers new and original insights into the Big Questions in economics. More particularly, it is when the stylized facts are at odds with existing theory that Acemoglu finds innovative and highly relevant answers to age-old issues like the accumulation of human capital, the drivers of technical change, the determinants of economic growth or the political economy of institutions – and, last but not least, the origins of political systems such as democracies. In many cases, Acemoglu steps in where other economists are clueless as to how to put the tools of economics to use, and he often does so by endogenizing those factors that remained, at best, unexplained in previous research.

The exceptional quality of his work has not gone unnoticed. To give just one example: in 2005 Acemoglu was awarded the highly prestigious *John Bates Clark Medal* from the American Economic Association for the best American economist under the age of 40. In his essay on the receipt of this award, the Chicago economist Robert Shimer stated – and I quote – that Acemoglu’s “unparalleled combination of originality, thoroughness, prolificacy, has propelled him to the frontier of each field that he has explored”.² It is exactly this indeed unique combination of originality, analytical rigour and the courage to take on big, unresolved issues that has made Acemoglu very popular with the young and aspiring economists in our profession. In the Netherlands, Acemoglu is looked upon by many PhD students and post-docs as a main source of inspiration. One of them, the late Richard Nahuis, who was a post-doc here in Utrecht, told me on more than one occasion that

Acemoglu’s work and style was the reason why he had chosen to pursue an academic in academia. Compliments don’t get much bigger than this, I guess.

Acemoglu is clearly not a researcher who is only after the applause of his peers. When it comes to inspiring students, he does more than just passing on his views by means of academic papers. For example, he has just posted the manuscript for a textbook called *An Introduction to Modern Economic Growth* on his homepage. This book, with its impressive length of 1200 pages, covers close to everything there is to say about the modern economic analysis of economic growth. In doing so, it also succeeds in integrating many elements (notably technical change, institutions, and political systems) of Daron’s own research into the core of economic growth analysis. No doubt, this graduate textbook will be the benchmark for both students and researchers in many years to come.

By awarding an honorary doctorate to Professor Acemoglu, Utrecht University not only wishes to reward a truly exceptional and innovative academic who has already made a huge impact on economics and related disciplines. In deciding to give this degree to Acemoglu, the board for the Conferral of Doctoral Degrees of Utrecht University also wants to show that it puts the highest value on research that is inspired by and inspiring for other disciplines. This multidisciplinary aim lies at the heart of Utrecht’s so-called *Focus & Mass Research Strategy*. Research and teaching in economics in Utrecht are very much grounded on and inspired

by the kind of research of which Acemoglu's work is such a prime example. It is therefore truly a great pleasure for Professor Clemens Kool, head of the department of economics, and myself to act as honorary 'promotores' for Daron Acemoglu, and grant him the honorary degree at the *Dies Natalis* on the occasion of the 372nd anniversary of Utrecht University.

Harry Garretsen
Professor of International Economics, Utrecht University

Notes

- ¹ See for more information Daron Acemoglu's homepage at MIT:
<http://econ-www.mit.edu/faculty/acemoglu>
- ² For a pdf version of the 2006 paper "Daron Acemoglu: 2005 John Bates Clark Medalist" by Robert Shimer see
<http://home.uchicago.edu/~shimer/wp/daron.pdf>



Michael Storper is Professor of Economic Geography at the London School of Economics, Professor of Economic Sociology at the Institute of Political Studies (Sciences Po) in Paris, as well as Academic Director of its Master of Public Affairs and member of the Center for the Sociology of Organisations, and Professor of Regional and International Development in the School of Public Affairs at UCLA in Los Angeles. He received his PhD in Economic Geography at the University of California at Berkeley. His research concentrates on regional economic development and policy, including such themes as globalization, technological change and global economic development, trade costs and trade patterns, regional economies, and urban-metropolitan development, and the role of institutions and social networks in economics. A good amount of his research is comparative, concentrating on western Europe and Brazil. Currently he is working on globalization processes and the ways that they are affected by flows of knowledge, at world scale and in the European Union. Recent research has especially concentrated on the role

of face-to-face contact in the contemporary economy; on the social structures of growth in different regions around the world; and on the way that regions face globalization processes. He is author of *The Regional World*; *Worlds of Production* (with Robert Salais); and *The Capitalist Imperative* (with Richard Walker), as well as numerous scholarly articles.

Prof. dr. Michael Storper

Erepromotores: Prof. dr. Ron A. Boschma
Prof. dr. Oedzge A.L.C. Atzema

It was on a rainy day in the year 1991 that I was strolling around on a second hand book market in Rotterdam. At that time, I was struggling with my PhD. For sure, I had developed some ideas about the spatial formation of new industries, but I had real problems to find the right words to express these thoughts. It was in these difficult personal circumstances that I found Michael Storper's book *The Capitalist Imperative* that he had published together with Richard Walker in 1989. That book made a huge impact on me. What I found particularly useful was the concept of Windows of Locational Opportunity. That concept provided a powerful explanation for why it is quite unpredictable where new industries will emerge and develop.

Therefore, I consider it a great privilege to grant Professor Michael Storper today an honorary degree for his major achievements in the field of Economic Geography. With this doctorate, we honour one of the most creative and influential scientists in Economic Geography of the past decades.

Professor Storper's research output is very impressive. He has not only widely published in leading international journals, he is also one of the most cited economic geographers in the world. In

addition to that, in his research, Michael Storper brings together insights from disciplines like economics, geography, sociology, organization studies, political sciences and history. This is further illustrated by the fact that he holds three professorships in quite different institutes, that is, a professorship at the Department of Urban Planning of the UCLA, a professorship in Economic Sociology in Paris, and a professorship in Economic Geography at the London School of Economics and Political Science.

Of course, it is impossible to present an exhaustive list of all the contributions Michael Storper has made in the past decades. Let me briefly mention just two of them.

What is a thread in his work is how the current wave of globalization affects the geographical distribution of economic activities. Michael Storper has provided key insights in what he describes in his seminal book *The Regional World* published in 1997 as (and I quote) "... the principal dilemma of contemporary economic geography – the resurgence of regional economies and of territorial specialization in an age of increasing ease in transportation and communication ..." (p. 21). Over the years, he has built an impressive theoretical and conceptual framework to understand why regions still matter as a basic economic unit of analysis, despite tendencies of globalization. The reason why this is the case is that regions can be considered places of relational assets or 'untraded interdependencies'. Doing so, he highlights the more intangible nature of positive externalities in agglomerations. In his research, he points to the crucial role of face-to-face contacts to

explain the spatial clustering of creative industries in which information is imperfect, rapidly changing, and not easily codified. In addition, he has demonstrated in his work how institutions, social conventions and informal rules (the so-called soft factors) can be considered a driving force for regional development. What Storper persistently emphasizes is that different regional worlds of production co-exist, with very different social and economic territorial assets, as his studies in France, Italy and the United States show.

Professor Michael Storper has explored quite extensively how history could be taken seriously in economic geography. A major insight developed in the late 1980s is that spatial clustering should be seen as a dynamic process in which industries create and produce space, and which he and his colleague Richard Walker described as 'geographical industrialization'. This stood in sharp contrast to more conventional approaches that viewed the spatial clustering of industries as a static, allocative process, being merely a response to prior resource endowments or comparative advantages. In the 1990s, he integrated this view with the evolutionary literature on technical and institutional change, explaining why processes of innovation are often geographically localized and territorially specific. Doing so, Storper has contributed to the foundations of an evolutionary approach in economic geography, an approach that has become firmly established at the Department of Economic Geography of Utrecht University in the last decade. For this, among other things, we owe a lot to Professor Michael Storper, and for this, we honour him today. It is therefore a

great pleasure for Professor Oedzge Atzema and myself to act as honorary 'promotores' for Michael Storper, and grant him the honorary degree at the *Dies Natalis* of Utrecht University.

Ron Boschma
Professor in Regional Economics, Utrecht University

Colofon

Dies Natalis 2008

Uitgave

© Universiteit Utrecht, maart 2008

ISBN

978-90-393-4787-4

Productie en eindredactie

Communicatie Service Centrum
Universiteit Utrecht
Heidelberglaan 8, 3584 CS Utrecht

Basisontwerp binnenwerk

Proforma, Rotterdam

Vormgeving en drukwerk

ZuidamUithof drukkerijen, Utrecht

Opmaak omslag:

Flowdesign, Utrecht